Vingt-Septième Tournoi des Villes

Automne 2005

Épreuve normale, quatrième–troisième-seconde

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Un triangle ABC est donné. Les points M_1, M_2, M_3 sont les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ respectivement, les points H_1, H_2, H_3 sont les bases des hauteurs tracées à partir de C, A et B respectivement. Montrer qu'on peut former un triangle ayant des côtés de longueur H_1M_2, H_2M_3 et H_3M_1. `[3 points]`

Exercice 2 : On écrit un nombre à chaque sommet d'un cube. On fait une opération qui consiste à remplacer chacun de ces nombres par la moyenne arithmétique de ses trois voisins juste avant. En répétant cette opération 10 fois de suite on découvre que les nombres écrits aux sommets sont les mêmes qu'au départ. Est-ce que cela implique que les nombres de départ étaient obligatoirement égaux ? `[3 points]`

Exercice 3 : Un segment de longueur 1 est divisé en 11 segments de longueurs inférieures ou égales à un certain nombre a. Pour quelles valeurs de a peut-on affirmer avec certitude que n'importe quel triplet de sous-segments permet de former un triangle ? `[4 points]`

Exercice 4 : Sur un échiquier 15×15 une pièce peut se déplacer de 8 ou de 9 cases horizontalement ou verticalement. On n'a pas le droit de placer la pièce deux fois sur une même case. Quel est le nombre maximum de cases qu'on peut parcourir avec cette pièce ? (On peut commencer par la case de son choix et on ne compte que les cases sur lesquelles la pièce s'est arrêtée, pas celles qu'elle a juste « survolées ».) `[4 points]`

Exercice 5 : Nous sommes en possession de 6 pièces de monnaie dont une est fausse. Le poids de la fausse pièce est différent de celui d'une vraie, mais nous ne connaissons ni l'un ni l'autre. Une balance permet de déterminer le poids de n'importe quel ensemble de pièces qu'on pose dessus. Comment trouver la fausse pièce en 3 pesées ? `[5 points]`