



Vingt-Septième Tournoi des Villes

Automne 2005

Épreuve difficile, quatrième-troisième-seconde

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Un palindrome est un entier naturel dont l'écriture décimale est symétrique (par exemple, 1, 343 et 2002 sont des palindromes, mais pas 2005). Peut-on trouver 2005 entiers naturels n tels que n et $n + 110$ soient tous deux des palindromes? [3 points]

Exercice 2 : Les prolongements des côtés $[AB]$ et $[CD]$ d'un quadrilatère convexe $ABCD$ se coupent en un point K . On sait que $AD = BC$. Soient M et N les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[CD]$. Montrer que le triangle MNK a un angle obtu. [5 points]

Exercice 3 : Sur chaque case d'un échiquier 8×8 est posée une tour. En un coup on peut retirer une tour qui menace un nombre impair d'autres tours. Quel est le nombre maximum de tours qu'on peut retirer de l'échiquier? [Deux tours se menacent lorsqu'elles se trouvent sur la même ligne ou sur la même colonne de l'échiquier et qu'il n'y a pas d'autres tours entre les deux.] [6 points]

Exercice 4 : Deux fourmis courent le long du bord d'une table polygonale. Tous les côtés de la table mesurent au moins 1 m. Les fourmis sont à chaque instant à 10 cm l'une de l'autre. Au départ les fourmis se trouvent sur un même côté de la table.

- Supposons que la table est convexe. Peut-on affirmer que les fourmis peuvent toujours faire un parcours de sorte que chaque fourmi soit passée par tous les points du bord? [2 points]
- Maintenant la table n'est pas nécessairement convexe. Peut-on affirmer que les fourmis peuvent toujours faire un parcours de sorte que par chaque point du bord soit passée au moins une fourmi? [4 points]

Exercice 5 : Trouver le plus grand entier naturel N tel que l'équation $99a + 100b + 101c = N$ possède une unique solution avec a, b, c entiers strictement positifs. [7 points]

Exercice 6 : Le Petit Goinfre possède 1000 bocaux de confiture. Ces bocaux n'ont pas nécessairement la même taille, mais chaque bocal contient au plus $1/100$ de la quantité totale de confiture. Au petit-déjeuner, le Petit Goinfre est autorisé à choisir 100 bocaux et à manger la même quantité de confiture dans chacun de ces bocaux. Montrer que le Petit Goinfre a la possibilité de finir toute sa confiture en un nombre fini de petits déjeuners. [8 points]