



## Vingt-Sixième Tournoi des Villes Printemps 2005

### Épreuve difficile, quatrième–troisième–seconde

Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.

---

**Exercice 1 :** Sur le graphe d'un polynôme du second degré à coefficients entiers sont marqués deux points à coordonnées entières.

Montrer que si la distance entre ces deux points est entière alors le segment qui les relie est parallèle à l'axe des abscisses. [4 points]

---

**Exercice 2 :** Soit  $ABC$  un triangle. On note  $A'$  et  $B'$  les pieds des hauteurs de ce triangle issues respectivement de  $A$  et de  $B$ ;  $(AA')$  et  $(BB')$  se coupent en  $H$ . On note  $X$  et  $Y$  les milieux respectifs de  $[AB]$  et de  $[CH]$ . Montrez que  $(XY)$  et  $(A'B')$  sont perpendiculaires. [5 points]

---

**Exercice 3 :** La montre du baron de Muenchhausen fonctionne correctement, mais elle n'a aucun chiffre marqué ni aucune graduation. Elle possède seulement trois aiguilles différentes indiquant les heures, les minutes et les secondes. D'après le baron, on peut connaître l'heure exacte en regardant sa montre si l'on sait qu'il est plus de 8 heures et qu'il n'est pas encore 20 heures grâce aux positions relatives des aiguilles. Est-ce vrai? [5 points]

*Les aiguilles de la montre se déplacent de manière uniforme, pas par à-coups.*

---

**Exercice 4 :** Une feuille de papier quadrillé  $10 \times 12$  est pliée plusieurs fois le long des lignes du quadrillage jusqu'à ce que l'on obtienne un carré  $1 \times 1$ . Combien de morceaux de papier peut-on obtenir si l'on coupe ce carré d'un coup de ciseaux reliant :

- (a) les milieux de deux côtés opposés? [2 points]
- (b) les milieux de deux côtés voisins? [4 points]

*Donner toutes les réponses et démontrer qu'il n'y en a pas d'autres.*

---

**Exercice 5 :** Un jeu est constitué de parallélépipèdes rectangles identiques. On peut les ranger dans une boîte qui est aussi un parallélépipède rectangle. À cause d'une erreur de fabrication, un exemplaire du jeu a été fabriqué avec des pièces toutes identiques ayant un côté strictement plus court que la pièce originale. Est-il possible de ranger toutes ces pièces dans une nouvelle boîte dont deux côtés sont identiques à ceux de la première boîte et le dernier est strictement plus petit? [6 points]

*Les pièces sont rangées de telle manière que chacun de leurs côtés soit parallèle à un côté de la boîte.*

---

**Exercice 6 :** Jean et Paul partagent un tas de 25 pièces valant 1, 2, ..., 25 roubles. À chaque étape, l'un d'eux choisit une pièce dans le tas et l'autre décide à qui reviendra cette pièce. Au premier coup c'est Jean qui choisit la pièce; à chaque coup suivant c'est celui qui a le plus de roubles ou, en cas d'égalité, celui qui avait choisi le coup d'avant.

Est-ce que Jean peut s'assurer d'avoir plus de roubles que Paul à la fin du jeu, ou est-ce que Paul peut toujours l'en empêcher? [6 points]

---

**Exercice 7 :** Les cases d'un échiquier sont numérotées de la manière suivante : le coin en haut à gauche porte le numéro 1, son voisin de droite porte le numéro 2, et son voisin inférieur porte le numéro 3; les trois cases de la diagonale suivante sont numérotées 4, 5 et 6 en partant du haut, et ainsi de suite de telle manière que le coin en bas à droite est numéroté par 64. Pierre place 8 pierres sur des cases de l'échiquier de telle manière que chaque colonne et chaque rangée contienne exactement une pierre. Ensuite, il déplace chaque pierre vers une case portant un numéro supérieur. Est-il possible que chaque rangée et chaque colonne contienne encore exactement une pierre? [8 points]