



Vingt-Sixième Tournoi des Villes
Printemps 2005
Épreuve normale, première–terminale

Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.

Exercice 1 : Dans le plan muni d'un repère, on dessine les graphes de quatre fonctions de la forme $y = x^2 + ax + b$, où a et b sont des nombres réels. Ces graphes ont exactement quatre points d'intersection, et en chacun de ces points s'intersectent exactement deux graphes.

Montrer que la somme de la plus grande et de la plus petite des abscisses des points d'intersection est égale à la somme des deux autres. [3 points]

Exercice 2 : On inscrit sur un ruban infini tous les entiers positifs en notation décimale (sans séparation entre eux) : 123456789101112... Le ruban est ensuite découpé en bandes de sept chiffres de long.

Montrer que tout entier à sept chiffres apparaîtra

- (a) au moins sur une bande ; [3 points]
- (b) sur une infinité de bandes. [1 point]

Exercice 3 : Dans un carré $ABCD$, M et N sont les milieux des côtés $[BC]$ et $[AD]$ respectivement. Sur la droite (AC) , hors du segment $[AC]$ et du côté de A , on choisit un point K . Le segment $[KM]$ intersecte le côté $[AB]$ en un point L .

Montrer que les angles \widehat{KNA} et \widehat{LNA} sont égaux. [4 points]

Exercice 4 : Dans une grande ville, toutes les rues sont dans l'une ou l'autre de deux directions perpendiculaires. Pendant un déplacement dans cette ville, une voiture tourne 100 fois à gauche.

Combien de fois a-t-elle tourné à droite, sachant qu'elle n'est jamais passée deux fois au même endroit et est revenue à son point de départ ? [4 points]

Exercice 5 : On considère plusieurs nombres positifs, dont la somme est égale à 10 et tels que la somme de leurs carrés est supérieure à 20.

Montrer que la somme de leurs cubes est supérieure à 40. [5 points]