



Vingt-Sixième Tournoi des Villes
Printemps 2005
Épreuve difficile, première-terminale

Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.

Exercice 1 : Sur le graphe d'un polynôme à coefficients entiers sont marqués deux points à coordonnées entières.

Montrer que si la distance entre ces deux points est entière alors le segment qui les relie est parallèle à l'axe des abscisses. [4 points]

Exercice 2 : Un cercle W_1 passe par le centre d'un cercle W_2 . À partir d'un point C sur le cercle W_1 on trace les deux tangentes au cercle W_2 . Ces tangentes coupent chacune le cercle W_1 une deuxième fois, l'une au point A et l'autre au point B .

Montrer que le segment $[AB]$ est perpendiculaire à la droite qui relie les centres des cercles. [5 points]

Exercice 3 : Jean et Paul partagent un tas de 25 pièces valant 1, 2, ..., 25 roubles. À chaque étape, l'un d'eux choisit une pièce dans le tas et l'autre décide à qui reviendra cette pièce. Au premier coup c'est Jean qui choisit la pièce; à chaque coup suivant c'est celui qui a le plus de roubles ou, en cas d'égalité, celui qui avait choisi au coup d'avant.

Est-ce que Jean peut s'assurer d'avoir plus de roubles que Paul à la fin du jeu, ou est-ce que Paul peut toujours l'en empêcher? [5 points]

Exercice 4 : Existe-t-il un polynôme f de degré 2 à coefficients réels tel que pour tout n entier strictement positif l'équation

$$\underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{n \text{ lettres } f} = 0$$

ait exactement 2^n racines réelles distinctes? [6 points]

Exercice 5 : Un icosaèdre et un dodécaèdre sont inscrits dans une même sphère. Montrer qu'ils sont alors circonscrits à une même sphère. [7 points]

On rappelle qu'un icosaèdre est composé de 20 faces en forme de triangles équilatéraux égaux; 5 faces se rencontrent en chaque sommet; les angles entre les faces sont tous égaux. Un dodécaèdre est composé de 12 faces en forme de pentagones réguliers égaux; 3 faces se rencontrent en chaque sommet; les angles entre les faces sont tous égaux.

Exercice 6 : Soit a un coin d'un échiquier 8×8 et soit b la case voisine de a en diagonale. Montrer qu'une « tour boiteuse » a plus de façons de parcourir tout l'échiquier à partir de a qu'à partir de b . [7 points]

Une tour boiteuse avance d'une case par coup, verticalement ou horizontalement. Elle doit parcourir toutes les cases de l'échiquier une et une seule fois.

Exercice 7 : Dans l'espace sont donnés 200 points. Ils sont reliés par des segments deux à deux, et on sait que les segments ne se coupent pas. Chaque segment est colorié d'une couleur choisie parmi K disponibles. Pierre veut colorier chaque point d'une couleur choisie parmi les K disponibles de sorte qu'il n'y ait aucune paire de points ayant la même couleur que le segment qui les relie. Est-ce que c'est toujours possible si

(a) $K=7$? [4 points]

(b) $K=10$? [4 points]