



Vingt-Sixième Tournoi des Villes

Automne 2004

Épreuve normale, quatrième–troisième–seconde

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Peut-on ordonner les entiers de 1 à 2004 de telle façon que la somme de 10 entiers consécutifs soit toujours divisible par 10 ? [3 points]

Exercice 2 : Une boîte contient 111 billes de couleurs rouge, bleue, verte et blanche. On sait qu'en piochant 100 billes au hasard on trouvera toujours 4 billes de couleurs différentes. Combien de billes faut-il piocher pour être sûr d'avoir tiré 3 billes de couleurs différentes ? [4 points]

Exercice 3 : Dans un pays, certaines villes sont reliées entre elles par des lignes de bus (sans arrêts intermédiaires). Il est possible d'aller en bus de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre (éventuellement avec des changements). Monsieur Simple a acheté un billet pour chaque ligne de bus (il peut donc prendre chaque ligne une fois dans n'importe quel sens). Monsieur Ainuple a, quant à lui, acheté n billets pour chaque ligne de bus. Monsieur Simple a fait un voyage en utilisant tous ses billets (et sans en acheter de nouveaux). Il est parti d'une ville A pour finir son voyage dans une ville B . Monsieur Ainuple est également parti de A et s'est finalement retrouvé dans une ville X d'où il ne peut plus partir sans acheter de nouveau billet. Montrer que X est soit A soit B . [4 points]

Exercice 4 : Sur le plan sont tracés un cercle et une droite qui ne se coupent pas. Comment construire à la règle et au compas un carré dont deux sommets voisins se trouvent sur la droite et les deux autres sur le cercle (en supposant qu'un tel carré existe) ? [5 points]

Exercice 5 : On dira que deux entiers sont « presque égaux » si la différence entre eux est au plus 1. Combien y a-t-il de façons de représenter le nombre 2004 en tant que somme d'entiers strictement positifs deux à deux presque égaux ? La somme peut comporter un seul terme ou plus ; deux sommes qui ne se distinguent que par l'ordre des termes sont considérées comme identiques. [5 points]