Vingt-Sixième Tournoi des Villes
Automne 2004
Épreuve difficile, quatrième–troisième–seconde

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : On dira qu'un triangle est rationnel si tous ses angles mesurent un nombre rationnel de degrés. On dira qu'un point à l'intérieur d'un triangle rationnel est rationnel si l'on obtient trois triangles rationnels en reliant ce point aux trois sommets du triangle. Montrer que si un triangle est rationnel et aux angles aigus, alors il contient au moins trois points rationnels distincts. `[4 points]`

Exercice 2 : Le cercle inscrit dans un triangle ABC touche ses côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ aux points C', A' et B' respectivement. On sait que $AA' = BB' = CC'$. Est-ce que le triangle ABC est nécessairement équilatéral ? `[5 points]`

Exercice 3 : Quel est le plus grand nombre de cavaliers que l'on peut mettre sur un échiquier 8×8 pour que chacun menace au plus 7 autres ? [On rappelle qu'un cavalier effectue un mouvement composé d'un déplacement de deux cases horizontalement ou verticalement puis d'un déplacement d'une case dans l'autre direction.] `[6 points]`

Exercice 4 : Ivan a choisi deux nombres strictement positifs x et y. Il a écrit sur une feuille de papier les nombres $x + y$, $x - y$, xy et x/y. Il a ensuite montré la feuille à Pierre sans lui dire quel nombre est obtenu par quelle opération arithmétique. Montrer que Pierre peut retrouver x et y de manière unique. `[6 points]`

Exercice 5 : On choisit un point K sur le côté $[BC]$ d'un triangle ABC. Les cercles inscrits dans les triangles ABK et ACK touchent le côté $[BC]$ aux points M et N respectivement. Montrer l'inégalité

$$BM \cdot CN > KM \cdot KN.$$

`[7 points]`

Exercice 6 : Deux personnes se partagent un morceau de fromage. D'abord le premier coupe le fromage en deux, puis le deuxième coupe en deux l'un des deux morceaux obtenus (qui ne sont pas forcément égaux), etc., jusqu'à ce qu'ils arrivent à 5 morceaux. Ensuite le premier prend un des morceaux, puis le deuxième prend un des morceaux restants, etc., jusqu'au dernier morceau. Déterminer pour chaque joueur quelle est la plus grande part de fromage qu'il peut être sûr d'obtenir quoi que fasse l'autre. `[8 points]`

Exercice 7 : A et B sont deux rectangles. Avec plusieurs rectangles identiques à A on arrive a assembler (en les mettant les uns à côté des autres sans trous ni chevauchements) un rectangle semblable à B. Montrer qu'avec plusieurs rectangles égaux à B on arrivera à assembler un rectangle semblable à A. `[8 points]`