



## Vingt-Cinquième Tournoi des Villes Printemps 2004

### Épreuve normale, quatrième–troisième–seconde

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

---

**Exercice 1 :** Soit  $ABC$  un triangle tel que la bissectrice de l'angle  $\widehat{A}$ , la médiatrice de  $[AB]$  et sa hauteur issue de  $B$  sont concourantes.

Montrer que la bissectrice de l'angle  $\widehat{A}$ , la médiatrice de  $[AC]$  et sa hauteur issue de  $C$  sont aussi concourantes. [3 points]

---

**Exercice 2 :** Trouver tous les entiers  $n$  strictement positifs tels qu'il existe  $n$  entiers successifs dont la somme est un nombre premier. [3 points]

---

**Exercice 3 :** On a trois cruches identiques. Il y a 3 litres de sirop dans la première,  $n$  litres d'eau dans la seconde et la dernière est vide. On peut transvaser tout le liquide d'une cruche à une autre ou vider une cruche. On sait aussi transvaser le liquide d'une cruche à une autre jusqu'à ce qu'elles contiennent la même quantité de liquide.

- a) Comment peut-on fabriquer 10 litres de boisson contenant 30% de sirop si  $n = 20$  ? [3 points]
- b) Pour quelles autres valeurs entières de  $n$  est-ce possible ? [2 points]

---

**Exercice 4 :** Soit  $a$  un entier strictement supérieur à 1 et  $b$  le nombre obtenu en écrivant  $a$  deux fois à la suite (si  $a = 123$  alors  $b = 123123$  ; bien sûr,  $a$  ne commence pas par 0).

Donner toutes les valeurs entières que peut prendre  $b/a^2$ . [5 points]

---

**Exercice 5 :** Deux nombres de dix chiffres sont appelés *voisins* si ils ne diffèrent que d'un chiffre (1234567890 est voisin de 1230567890).

Combien de nombres peut-on écrire au maximum de telle manière que l'on ne puisse pas en trouver deux qui soient des voisins ? [6 points]