Vingt-Cinquième Tournoi des Villes

Printemps 2004

Épreuve difficile, quatrième–troisième–seconde

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Une suite arithmétique finie n'est composée que d'entiers. La somme de ses termes est une puissance de deux.

Montrer que le nombre de termes de cette suite est aussi une puissance de deux.

(On rappelle qu'une suite est arithmétique si la différence entre deux termes successifs est toujours la même.) `[4 points]`

Exercice 2 : Si on joue aux dames sur un damier 8×8 (c'est le jeu standard dans certains pays), combien de pions peut-on placer de telle manière que tous puissent être pris ?

(Un pion peut être pris s'il se trouve entre un autre pion et une case vide en diagonale, sans espace entre ces cases. En particulier, on ne tient pas compte de la couleur des pions.) `[5 points]`

Exercice 3 : Les actions de la société « Soap Bubble SARL » augmentent ou diminuent tous les jours d'exactement $n\%$ où n est un entier fixé strictement compris entre 0 et 100. Existe-t-il un entier n pour lequel le prix des actions peut prendre deux fois la même valeur.

(On suppose que les prix sont calculés avec une précision illimité et que le prix de départ n'est pas nul.) `[5 points]`

Exercice 4 : Deux cercles se coupent en A et B. Leur tangente commune la plus proche de B touche les cercles en E et F. Soit M l'intersection de (AB) et (EF) et K tel que $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AM}$. Soit C le second point d'intersection de (KE) et du cercle contenant E et D le second point d'intersection de (KF) avec le cercle contenant F.

Montrer que A, C et D sont alignés. `[6 points]`

Exercice 5 : Une table de billard a la forme d'un polygone (pas forcément convexe) dont les côtés successifs sont perpendiculaires. Chaque sommets contient un trou. Une boule roule depuis l'un des sommet dont l'angle intérieur vaut $90°$.

Montrer qu'elle ne peut pas revenir à son point de départ.

La boule et les trous sont ponctuels et n'ont donc pas de largeur. Quand une boule rebondit contre une bande, la bissectrice de l'angle que décrit sa trajectoire est perpendiculaire à la bande (autrement dit, elle se comporte comme un rayon lumineux qui frappe un mirroir). `[6 points]`

Exercice 6 : À ce jeu, on commence par écrire au tableau le nombre $2004! = 1 \times 2 \times \cdots \times 2004$. À son tour, un joueur soustrait du nombre qui est écrit n'importe quel nombre inférieur ou égal, pourvu qu'il ne soit pas divisible par plus de 20 nombre premiers distincts et efface le nombre précédent. Le gagnant est le premier joueur qui obtient 0.

Lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante et quelle est cette stratégie ? `[7 points]`