



Vingt-Cinquième Tournoi des Villes
Printemps 2004
Épreuve difficile, première-terminale

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Les actions de la société « Soap Bubble SARL » augmentent ou diminuent tous les jours d'exactly $n\%$ où n est un entier fixé strictement compris entre 0 et 100. Existe-t-il un entier n pour lequel le prix des actions peut prendre deux fois la même valeur.

(On suppose que les prix sont calculés avec une précision illimitée et que le prix de départ n'est pas nul.) [4 points]

Exercice 2 : Une table de billard a la forme d'un polygone (pas forcément convexe) dont les côtés successifs sont perpendiculaires. Chaque sommet contient un trou. Une boule roule depuis l'un des sommets dont l'angle intérieur vaut 90° .

Montrer qu'elle ne peut pas revenir à son point de départ.

La boule et les trous sont ponctuels et n'ont donc pas de largeur. Quand une boule rebondit contre une bande, la bissectrice de l'angle que décrit sa trajectoire est perpendiculaire à la bande (autrement dit, elle se comporte comme un rayon lumineux qui frappe un miroir). [6 points]

Exercice 3 : On se donne un tétraèdre et on cherche un plan tel que la projection orthogonale de ce tétraèdre sur ce plan soit d'aire la plus grande possible.

Montrer que ce plan est parallèle à une face du tétraèdre ou parallèle à deux arêtes opposées du tétraèdre. [6 points]

Exercice 4 : À ce jeu, on commence par écrire au tableau le nombre $2004! = 1 \times 2 \times \dots \times 2004$. À son tour, un joueur soustrait du nombre qui est écrit n'importe quel nombre inférieur ou égal, pourvu qu'il ne soit pas divisible par plus de 20 nombre premiers distincts et efface le nombre précédent. Le gagnant est le premier joueur qui obtient 0.

Lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante et quelle est cette stratégie? [6 points]

Exercice 5 : La parabole d'équation $y = x^2$ et un cercle se coupent en exactement deux points A et B . Au point A , la tangente au cercle est aussi tangente à la parabole. Est-ce que c'est vrai aussi au point B ? [7 points]

Exercice 6 : On donne à un magicien un paquet de 36 cartes, faces cachées. Il doit prédire la couleur (pique, cœur, carreau ou trèfle) de la carte qui se trouve au dessus. Une fois qu'il a découvert cette carte, il la replace en dessous du paquet et essaie de prédire la couleur suivante, et ainsi de suite. Son objectif est de prédire correctement la couleur le plus grand nombre de fois possible.

En réalité, le dos des cartes n'est pas symétrique et le magicien voit avant de réaliser sa prédiction dans lequel des deux sens possible a été placé la carte par son assistant (qui a choisi le sens de ces cartes après que le paquet a été mélangé) selon un système sur lequel ils se sont mis d'accord.

Avec un tel système, le magicien peut-il être sûr de prédire correctement :

- strictement plus de la moitié des couleurs? [3 points]
- au moins vingt couleurs? [5 points]