



22^{ème} TOURNOI DES VILLES

*Automne 2000 ~ Quatrième Troisième Seconde
Épreuve difficile*

Exercice 1 [3 points]

On place des nombres tous différents dans les cases d'un tableau n fois n . On a souligné le plus petit des nombres dans chaque rangée, et il s'est trouvé que tous les nombres soulignés appartenaient à des colonnes différentes. Puis, le plus petit des nombres de chaque colonne a été souligné, et il s'est trouvé que tous les nombres soulignés appartenaient à des lignes différentes. Montrer que les nombres soulignés les deux fois étaient les mêmes.

Exercice 2 [3 points]

Entre deux droites parallèles, on a un cercle de rayon 1, tangent aux deux droites, et un triangle isocèle dont la base se trouve sur l'une des deux droites et le sommet sur l'autre. On sait que le triangle et le cercle ont exactement un point commun, et que ce point se trouve sur le cercle inscrit dans le triangle. Trouver le rayon du cercle inscrit.

Exercice 3 [4 points]

Les entiers positifs a , b , c , d sont tels que leur plus petit commun multiple est égal à $a + b + c + d$. Montrer que $abcd$ est divisible par 3 ou par 5 (ou les deux).

Exercice 4 [4 points]

Les cases d'un échiquier de 8 par 8 ne sont pas encore coloriées. Combien de coloriages en noir et blanc des cases de l'échiquier sont-ils tels que 31 cases sont noires, et que deux cases noires n'ont jamais de côté commun ? (Indiquer le nombre de coloriages et montrer que toutes les possibilités ont été prises en compte ; deux coloriages sont considérés comme différents s'il existe au moins une case qui est noire dans l'un et blanche dans l'autre.)

Exercice 5 [5 points]

Un poids de 11111 grammes est placé sur le plateau droit d'une balance. Quelqu'un place des poids sur les deux plateaux de la balance : le premier poids est de 1 gramme, et chaque poids successif est deux fois plus lourd que le précédent. À un moment, les deux plateaux sont en équilibre. Ou a été placé le poids de 16 grammes (à gauche ou à droite ?)

Exercice 6 [6 points]

Dans la session de printemps du Tournoi des Villes cette année, six problèmes ont été proposés aux élèves du pays N . Chaque problème a été résolu par exactement 1000 candidats, mais aucun couple de participants (pris ensembles) n'a réussi à résoudre les six problèmes. Quel est le plus petit nombre d'élèves possibles du pays N . à la session de printemps ? (Indiquez ce nombre, montrer que pour ce nombre les conditions du problème peuvent être remplies, et qu'elles ne peuvent pas l'être pour un nombre plus petit.)

Exercice 7 [8 points]

Un écolier a cent cartes sur lesquelles sont écrits les entiers de 1 à 100, ainsi qu'un nombre de cartes suffisamment grand sur lesquelles apparaissent les symboles $+$ et $=$. Quel est le plus grand nombre d'égalités vraies qu'il peut écrire ? (Chaque carte est utilisée au plus une fois. Dans chaque égalité, le signe $=$ ne peut apparaître qu'une fois. L'écolier ne doit pas tourner les cartes de nombres ni les placer côte à côte pour obtenir de nouveaux nombres.)