22ème TOURNOI DES VILLES

Automne 2000 ~ Première Terminale
Épreuve difficile

Exercice 1 [3 points]
Les entiers positifs a, b, c, d sont tels que leur plus petit commun multiple est égal à a + b + c + d. Montrer que abcd est divisible par 3 ou par 5 (ou les deux).

Exercice 2 [4 points]
Quel est le plus grand entier n tel qu'on puisse trouver n points sur la surface d'un cube, non tous sur la même face, formant les sommets d'un polygone plan régulier à n côtés ?

Exercice 3 [4 points]
On connaît les longueurs des côtés du triangle ABC : AB = c, BC = a et CA = b, avec a < b < c. Deux points B' et A' sont choisis sur les demi-droites BC et AC, respectivement, de façon que BB' = AA' = c. Deux points C" et B"sont choisis sur les demi-droites CA et BA de façon à ce que CC" = BB" = a. Trouver le rapport entre la longueur A'B' et la longueur C"B".

Exercice 4 [3 + 4 points]
On suppose que les entiers non nuls $a_1, a_2, \dots, a_n$ satisfont à l'équation

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x}}}} = x$$

pour toute valeur de x pour laquelle le membre de gauche a un sens.
(a) Montrer que l'entier n est pair.
(b) Quel est le plus petit n tel que de tels nombres existent ?

Exercice 5 [6 points]
Les cases d'un tableau m par n sont peintes de deux couleurs. On sait que si une tour est placée sur une case, elle attaquera strictement moins de cases de la même couleur que de cases de l'autre couleur (que celle de la case sur laquelle elle se trouve). (Une tour attaque toutes les cases de la rangée et de la colonne où elle se trouve, y compris celle sur laquelle elle se tient.) Montrer que dans chaque rangée et dans chaque colonne, le nombre de cases d'une couleur est le même que le nombre de cases de l'autre.

Exercice 6 [5 + 5 + 5 points]
(a) Plusieurs carrés noirs de côté 1 cm sont sont cloués à un plan blanc par un clou d'épaisseur 0,1 cm ; ils forment une figure polygonale noire. Est-il possible que le périmètre de cette figure soit de 1 km ? (Le clou ne peut toucher le bord d'aucun carré.)
(b) Même problème, mais avec un clou d'épaisseur 0 (un point).
(c) Plusieurs carrés noirs de côté 1 cm se trouvent sur un plan blanc, et y forment une figure polygonale noire (éventuellement en plus d'un morceau et/ou avec des trous). Est-il possible que le rapport de son périmètre à sa surface soit plus grand que 100 000 ?