21ème TOURNOI DES VILLES

Printemps 2000 ~ Quatrième Troisième Seconde
Épreuve normale

Exercice 1 [3 points]
Est-ce que le produit de deux entiers consécutifs peut être égal au produit de deux entiers pairs consécutifs si tous les entiers sont strictement positifs ?

Exercice 2 [4 points]
Dans un trapèze ABCD d'aire 1 le rapport des longueurs des bases BC/AD fait ½ . Soit K le milieu de la diagonale AC. Soit L le point d'intersection de la droite DK avec le côté AB. Trouver l'aire du quadrilatère BCKL.

Exercice 3 [2 + 3 points]
Rappel : un prisme n-gonal est formé par deux polygones à n côtés égaux, disposés l'un au-dessus de l'autre, chaque sommet du premier polygone étant relié par une arête au sommet correspondant de l'autre polygone.
(a) Montrer qu'on peut colorier les sommets d'un prisme 3n-gonal en 3 couleurs de telle manière que les 3 arêtes qui partent d'un sommet aboutissent toujours à des sommets de couleurs différentes.
(b) Supposons qu'on peut colorier les sommets d'un prisme n-gonal en 3 couleurs de telle manière que les 3 arêtes qui partent d'un sommet aboutissent toujours à des sommets de couleurs différentes. Montrer que n est divisible par 3.

Exercice 4 [5 points]
Peut-on placer des entiers naturels non nuls aux sommets d'un cube de telle sorte que si l'on prend deux nombres reliés par une arête un soit toujours divisible par l'autre et que cette propriété ne soit pas vérifiée pour deux nombres non reliés par une arête ?