



21^{ème} TOURNOI DES VILLES

*Printemps 2000 ~ Quatrième Troisième Seconde
Épreuve difficile*

Exercice 1 [3 points]

Trouver toutes les solutions réelles de l'équation

$$(x + 1)^{21} + (x + 1)^{20} (x - 1) + (x + 1)^{19} (x - 1)^2 + \dots + (x - 1)^{21} = 0.$$

Exercice 2 [6 points]

Soient un cercle et un point A à l'intérieur de ce cercle. Considérons tous les rectangles ABCD tels que B et D soient des points du cercle. Trouver l'ensemble des points C qu'on obtient ainsi.

Exercice 3 [7 points]

Deux brigands, Grosse-Main (GM) et Compas-dans-l'Oeil (CO), partagent un tas de 100 pièces. Grosse-Main prend un certain nombre de pièces dans la main et Compas-dans-l'Oeil décide auquel des deux elles reviendront. Ils continuent ainsi jusqu'à ce que l'un des deux ait obtenu 9 poignées de pièces, après quoi l'autre prend toutes les pièces restantes. (Le partage peut également finir par épuisement des 100 pièces, avant que quelqu'un ait obtenu 9 poignées.) Grosse-Main peut prendre dans la main n'importe quel nombre de pièces. Quel est le nombre maximal de pièces qu'il peut être sûr d'obtenir indépendamment de ce que fait Compas-dans-l'Oeil ? (Donnez ce nombre maximal, expliquez comment Grosse-Main peut obtenir ce nombre-là de pièces et montrez qu'il ne peut pas être sûr d'en obtenir plus.)

Exercice 4 [7 points]

Quel est le plus grand nombre de cavaliers qu'on peut mettre sur un échiquier 5 x 5 de telle sorte que chaque cavalier en ait exactement deux autres en prise ? (Dessinez la disposition des cavaliers et montrez qu'on ne peut pas en mettre plus.)

Exercice 5 [10 points]

Dans un tournoi d'échecs chaque joueur joue une et une seule partie contre chacun des autres joueurs. Une partie gagnée apporte un point, une partie nulle un demi point, une partie perdue zéro point. Appelons une partie « incorrecte » si elle est gagnée par un joueur qui, à la fin, a obtenu moins de points que celui qu'il a battu. Montrez que la proportion des parties incorrectes dans le nombre total de parties est strictement inférieure à $\frac{3}{4}$.