21$^{\text{ème}}$ TOURNOI DES VILLES

Printemps 2000 ~ Première Terminale
Épreuve normale

Exercice 1 [3 points]
Un quadrilatère convexe est divisé par ses diagonales en 4 triangles. Il se trouve que la somme des aires de deux triangles opposés est la même pour les deux couples de triangles opposés. Montrer que le point d'intersection des diagonales est le milieu d'au moins une d'elles.

Exercice 2 [4 points]
Sur un dé spécialement fabriqué, deux faces opposées sont marquées d'un point chacune, deux autres faces opposées sont marquées de deux points chacune, les deux dernières faces opposées de trois points chacune. En utilisant 8 dés comme cela, on construit un cube 2 x 2 x 2 et on compte le nombre de points sur chaque face de ce cube. Peut-il arriver qu'on obtienne 6 nombres consécutifs ?

Exercice 3 [4 points]
Montrer l'inégalité

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k \leqslant \frac{n^{2k} - (n-1)^k}{n^k - (n-1)^k}$$

pour deux entiers positifs n et k.

Exercice 4 [3 + 3 points]
Existe-t-il une suite infinie
(a) de réels,
(b) d'entiers,
telle que la somme de 10 termes successifs soit toujours strictement positive, alors que la somme des 10n + 1 premiers termes soit strictement négative pour tout n ?