21$^{\text{ème}}$ TOURNOI DES VILLES

Printemps 2000 ~ Première Terminale
Épreuve difficile

Exercice 1 [3 points]
Les entiers naturels strictement positifs m et n sont premiers entre eux (n'ont pas de diviseur commun autre que 1). La fraction

$$\frac{m+2000n}{n+2000m}$$

peut être simplifiée par d. Quel est la plus grande valeur possible de l'entier naturel d ?

Exercice 2 [5 points]
Les cordes AC et BD d'un cercle de centre O se coupent en un point K. Soient M et N les centres des cercles circonscrits aux triangles AKB et CKD. Montrer que OM = KN.

Exercice 3 [5 points]
Dans un jeu de cartes, certaines cartes sont tournées dos vers le bas, d'autres dos vers le haut. Pierre choisit dans le jeu (si c'est possible) un paquet d'une seule ou plusieurs cartes consécutives, tel que la première et la dernière cartes du paquet soient dos vers le bas. Il retourne ce paquet de cartes et le remet au même endroit dans le jeu. Montrer qu'après un nombre fini de tels retournements toutes les cartes finiront par être dos vers le haut. (Remarque : si le paquet est constitué d'une seule carte, il faut juste que cette carte soit dos vers le bas pour que Pierre puisse la retourner.)

Exercice 4 [5 points]
Sur une feuille à petits carreaux, on dessine un polygone convexe dont les sommets se trouvent aux noeuds du quadrillage. On suppose qu'aucun de ses côtés n'est vertical ni horizontal. Montrer que la somme des longueurs des lignes verticales du quadrillage à l'intérieur du polygone est égale à la somme des longueurs des lignes horizontales du quadrillage à l'intérieur du polygone.

Exercice 5 [7 points]
Trouver le plus grand nombre N pour lequel il existe N entiers naturels consécutifs tels que la somme des chiffres du premier entier soit divisible par 1, la somme des chiffres du deuxième entier soit divisible par 2, dots, la somme des chiffres du N$^{\text{ième}}$ entier soit divisible par N.

Exercice 6 [6 + 6 points]
Dans un tournoi d'échecs chaque joueur joue une et une seule partie contre chacun des autres joueurs. Une partie gagnée apporte un point, une partie nulle un demi point, une partie perdue zéro point. Appelons une partie « incorrecte » si elle est gagnée par un joueur qui, à la fin, a obtenu moins de points que celui qu'il a battu.
(a) Montrez que la proportion des parties incorrectes dans le nombre total de parties est strictement inférieure à ¾.
(b) Montrez que le nombre ¾ dans la question (a) ne peut pas être remplacé par un nombre inférieur.