21ème TOURNOI DES VILLES

Automne 1999 ~ Quatrième Troisième Seconde
Épreuve normale

Exercice 1 [2 + 2 points]
(a) On plie en deux un triangle rectangle en papier de sorte que le sommet de l'angle droit se superpose avec un autre sommet. On obtient ainsi un quadrilatère. Dans quel rapport est-ce que les diagonales de ce quadrilatère sont divisées par leur point d'intersection ?
(b) On plie en deux un triangle rectangle en papier d'aire 1, de sorte que le sommet de l'angle droit se superpose avec un autre sommet. On découpe le quadrilatère obtenu selon la diagonale issue du troisième sommet du triangle de départ. Trouver l'aire du morceau de papier le plus petit obtenu après ce découpage.

Exercice 2 [2 + 2 points]
On considère trois entiers a, b, c vérifiant $a + b + c = 0$. On associe à ce triplet le nombre
$d = a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}$
(a) Peut-il arriver que $d = 2$?
(b) Peut-il arriver que d soit un nombre premier ? (Un nombre premier est un nombre entier strictement plus grand que 1 qui n'a pas de diviseurs autres que 1 et lui-même. Les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17...)

Exercice 3 [4 points]
Sur un plan sont tracées n droites. Chaque droite coupe exactement 1999 autres droites. Trouver n (donner toutes les réponses possibles et prouver qu'il n'y en a pas d'autres).

Exercice 4 [4 points]
En Italie il y a des montres où l'aiguille des heures fait 1 tour de cadran en 24 heures (dans une montre ordinaire elle fait 2 tours en 24 heures). L'aiguille des minutes fait 1 tour par heure dans les deux modèles. L'aiguille des heures est plus courte que celle des minutes. On va appeler la ``division zéro'' la division qui correspond à midi et à minuit dans une montre ordinaire et seulement à minuit dans une montre italienne. Considérons une position des deux aiguilles par rapport à la division zéro qui peut se réaliser aussi bien sur une montre italienne que sur une montre ordinaire. Combien y a-t-il de positions comme cela ?

Exercice 5 [4 points]
On dispose de plaquettes rectangulaires en carton de taille 2 x 1. Sur chaque plaquette est dessinée une diagonale. Il y a des plaquettes de deux types car on peut dessiner une diagonale de deux manières différentes. Les plaquettes de chaque type sont fournies en nombre suffisant. Peut-on choisir 18 plaquettes et en former un carré 6 x 6 de sorte que les bouts des diagonales ne coïncident jamais ?