



21^{ème} TOURNOI DES VILLES

*Automne 1999 ~ Quatrième Troisième Seconde
Épreuve difficile*

Exercice 1 [3 points]

Des entiers naturels non nuls consécutifs sont écrits en ligne dans un tel ordre que si l'on choisit trois entiers qui se suivent dans la ligne, leur somme est toujours divisible par l'entier le plus à gauche parmi les trois. De plus, le dernier entier dans la ligne est impair. Quel est, dans ces conditions, le plus grand nombre possible d'entiers dans la ligne ?

Exercice 2 [2 + 2 points]

Les trois angles du triangle ABC sont aigus. A' et C' sont des points quelconques sur les côtés BC et AB respectivement. B' est le milieu du côté AC.

(a) Montrer que l'aire de A'B'C' fait au plus la moitié de l'aire de ABC.

(b) Montrer que l'aire A'B'C' de fait un quart de l'aire de ABC si et seulement si un des points A', C' est le milieu du côté correspondant.

Exercice 3 [5 points]

100 poids de 1, 2, dots, 100 grammes sont mis sur les deux plateaux d'une balance, de telle sorte que la balance est en équilibre. Montrer qu'on peut enlever 2 poids de chaque plateau de telle sorte que la balance soit de nouveau en équilibre.

Exercice 4 [3 + 4 points]

(a) Sur un échiquier 8 x 8 on met 16 pions : 8 pions blancs sur la ligne d'en bas et 8 pions noirs sur la ligne d'en haut. Un coup consiste à déplacer un pion sur une case voisine horizontalement ou verticalement (le déplacement est autorisé seulement si la case d'arrivée est libre). Quel est le nombre minimum de coups nécessaire pour mettre tous les pions blancs sur la ligne d'en haut et tous les pions noirs sur la ligne d'en bas ?

(b) Même question pour un tableau 7 x 7.

Exercice 5 [8 points]

Thomas et Jérémy infatigables construisent une suite. Ils commencent par un entier naturel non nul quelconque. Ensuite ils écrivent des nombres à tour de rôle : Thomas obtient son nombre en ajoutant au nombre précédent l'un de ses chiffres ; Jérémy obtient le sien en soustrayant au nombre précédent l'un de ses chiffres. Montrer qu'un nombre apparaîtra dans cette suite au moins 100 fois.

Exercice 6 [9 points]

Dans une feuille de papier rectangulaire on a fait n trous rectangulaires (les côtés des trous sont parallèles aux côtés de la feuille). On souhaite découper cette feuille trouée en rectangles en sorte qu'il y en ait le moins possible. Quel est le nombre minimum de rectangles tel que, quelle que soit la disposition des n trous, il existe toujours un découpage en ce nombre-là de rectangles ? (Montrer qu'on peut toujours découper la feuille en ce nombre minimum de rectangles, mais qu'il existe une disposition des n trous telle qu'on ne peut pas découper la feuille en un nombre de rectangles plus petit.)