$21^{\text{ème}}$ TOURNOI DES VILLES

Automne 1999 ~ Première Terminale
Épreuve difficile

Exercice 1 [3 points]
Pour quels n peut-on disposer les nombres de 1 à n en cercle de telle sorte que la somme de deux nombres voisins soit toujours divisible par le nombre qui les suit dans le sens des aiguilles d'une montre ?

Exercice 2 [2 + 3 points]
Sur une feuille de papier rectangulaire sont dessinés
(a) plusieurs points alignés ;
(b) trois points.
On plie ensuite la feuille en deux plusieurs fois (chaque fois le long d'une droite) de telle sorte que les points marqués ne se retrouvent pas sur les plis, puis on perce la feuille avec une aiguille. Montrer qu'on peut faire en sorte que les trous faits par l'aiguille coïncident avec les points marqués et qu'il n'y ait pas d'autres trous.

Exercice 3 [6 points]
Thomas et Jérémy infatigables construisent une suite. Ils commencent par un entier naturel non nul quelconque. Ensuite ils écrivent des nombres à tour de rôle : Thomas obtient son nombre en ajoutant au nombre précédent l'un de ses chiffres ; Jérémy obtient le sien en soustrayant au nombre précédent l'un de ses chiffres. Montrer qu'un nombre apparaîtra dans cette suite au moins 100 fois.

Exercice 4 [3 + 3 points]
Les points K et L sur les côtés AC et CB du triangle ABC sont les points de tangence des cercles inscrits extérieurement au triangle ABC (voir le dessin). Prouver que la droite qui relie les milieux de KL et de AB
(a) divise le périmètre du triangle ABC en deux parties égales ;
(b) est parallèle à la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$

Exercice 5 [4 + 4 points]
(a) 100 poids de 1, 2, ..., 100 grammes sont mis sur les deux plateaux d'une balance, de telle sorte que la balance est en équilibre. Montrer qu'on peut enlever 2 poids de chaque plateau de telle sorte que la balance soit de nouveau en équilibre.
(b) Soit n un entier naturel tel qu'on peut partager l'ensemble des poids de 1, ..., n grammes en deux parties de masse égale. Est-il vrai que si n > 3 on pourra toujours enlever deux poids de chaque partie en préservant l'égalité des masses ?

Exercice 6 [8 points]
Sur un échiquier infini on a marqué 2n cases de telle sorte qu'une tour peut visiter toutes ces cases sans traverser les cases non marquées. Montrer qu'on peut découper le domaine formé par les cases marquées en n rectangles.

Exercice 7 [8 points]

Prouver que tout 10n-èdre convexe possède au moins n faces avec le même nombre de côtés.