



## 20<sup>ème</sup> TOURNOI DES VILLES

*Printemps 1999 ~ Quatrième Troisième Seconde  
Épreuve difficile*

### **Exercice 1 [ 3 points ]**

Il y a 500 F sur un compte en banque. La banque autorise deux opérations : prendre 300 F du compte ou y mettre 198 F. Ces opérations peuvent être effectuées autant de fois qu'on veut, mais on ne possède pas d'autre argent que celui qu'il y a initialement sur le compte. Quelle est la somme maximale qu'on peut extraire du compte et comment le faire ?

### **Exercice 2 [ 4 points ]**

O est le point d'intersection des diagonales du parallélogramme ABCD. Montrer que si le cercle qui passe par A, B et O est tangent à la droite BC, alors le cercle qui passe par B, C et O est tangent à la droite CD.

### **Exercice 3 [ 4 points ]**

Voici un jeu pour 2 joueurs. Le premier joueur écrit en ligne de gauche à droite des 0 et des 1, jusqu'à ce qu'il y ait 1999 chiffres au total. Chaque fois que le premier écrit un chiffre, le deuxième permute deux chiffres parmi ceux qui sont déjà écrits (lorsqu'il n'y a qu'un seul chiffre d'écrit, le deuxième joueur ne fait rien). Est-ce que le deuxième joueur peut toujours faire en sorte qu'après son dernier coup la disposition des chiffres soit symétrique par rapport au chiffre du milieu ?

### **Exercice 4 [ 6 points ]**

Un disque est divisé par  $2n$  rayons en  $2n$  secteurs égaux. On colorie  $n$  secteurs en bleu et  $n$  en rouge dans un ordre quelconque. Dans les secteurs rouges on inscrit, en commençant par un certain secteur, les nombres de 1 à  $n$  dans le sens des aiguilles d'une montre. Dans les secteurs bleus on inscrit également, en commençant par un certain secteur, les nombres de 1 à  $n$ , mais dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Prouver qu'il existe un demi disque dans lequel sont inscrits tous les nombres de 1 à  $n$ .

### **Exercice 5 [ 6 points ]**

Le cercle inscrit dans le triangle ABC touche les côtés AB et AC aux points P et Q respectivement. R et S sont les milieux respectifs des côtés AC et BC. T est le point d'intersection des droites PQ et RS. Montrer que T se trouve sur la bissectrice de l'angle B du triangle.

### **Exercice 6 [ 9 points ]**

Une tour, en avançant d'une case par coup (verticalement ou horizontalement), a parcouru en 64 coups les cases de l'échiquier  $8 \times 8$  et est revenue sur la case de départ. Montrer que le nombre de coups horizontaux est différent du nombre de coups verticaux.