20ème TOURNOI DES VILLES

Printemps 1999 ~ Première Terminale
Épreuve normale

Exercice 1 [3 points]
1999 nombres sont écrits en ligne. On sait que le premier nombre est 1 et que chaque nombre (sauf le premier et le dernier) est égal à la somme de ses deux voisins. Trouver le dernier nombre.

Exercice 2 [3 points]
ABC est un triangle rectangle en C ; on sait que AC = 1 cm, BC = 3 cm. On construit sur l'hypoténuse AB un carré ABDE vers l'extérieur du triangle. Dans quel rapport la bissectrice de l'angle C divise-t-elle le côté DE du carré ?

Exercice 3 [3 points]
Sur un tableau sont écrits des entiers strictement positifs a_0, a_1,..., a_n. Sur un deuxième tableau on écrit les nombres suivants : b_0 = le nombre de nombres sur le premier tableau ; b_1 = le nombre de nombres du premier tableau qui sont strictement supérieurs à 1 ; b_2 = le nombre de nombres du premier tableau qui sont strictement supérieurs à 2, etc. On continue tant que les bi sont strictement positifs, on n'écrit pas de zéros. Ensuite on écrit sur un troisième tableau les nombres c_0, c_1,...obtenus par le même procédé à partir des nombres du deuxième tableau. Montrer que l'ensemble des nombres du troisième tableau est le même que celui du premier tableau.

Exercice 4 [5 points]
Un carré noir est dessiné sur le plan. Nous avons 7 plaques de la même forme et de la même taille que le carré. Comment poser les plaques sur le plan, de sorte qu'elles ne se recouvrent pas et que chacune recouvre au moins une partie du carré noir (au moins un point de son intérieur) ?

Exercice 5 [5 points]
Deux personnes jouent sur un carré 9 x 9 sur une feuille quadrillée. Le premier joueur met des croix dans les carreaux non occupés ; le deuxième met des ronds. (Le premier joueur commence le jeu et ensuite les deux jouent à tour de rôle.) Lorsque tous les carreaux sont occupés, on compte le nombre K de lignes et de colonnes dans lesquelles il y a plus de croix que de ronds, puis le nombre N de lignes et de colonnes dans lesquelles il y a plus de ronds que de croix. (On a donc K + N = 18.) La différence V = N – K est le gain du premier joueur. Trouver un nombre B tel que les deux conditions suivantes soient réalisées.
(a) Le premier joueur peut atteindre le gain égal à B quelle que soit la façon de jouer du deuxième joueur.
(b) Le deuxième joueur peut toujours faire en sorte que le gain du premier n'excède pas B, quelle que soit la façon de jouer du premier.