$20^{\text{ème}}$ TOURNOI DES VILLES

Printemps 1999 ~ Première Terminale
Épreuve difficile

Exercice 1 [4 points]
Dans la mer flotte un polyèdre convexe. Peut-il arriver que 90 % de son volume soient au-dessous du niveau de l'eau, mais que plus de la moitié de sa surface soit au-dessus du niveau de l'eau ?

Exercice 2 [4 points]
ABCD est un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de centre O. Les cercles circonscrits aux triangles ABO et CDO se coupent une deuxième fois au point F. Montrer que le cercle qui passe par A, F et D passe aussi par le point d'intersection des diagonales AC et BD.

Exercice 3 [5 points]
Trouver tous les couples d'entiers (x,y) tels que le nombre $x^2 + y^2$ divise $x^3 + y$ et $x + y^3$.

Exercice 4 [5 points]
Un disque est divisé par $2n$ rayons en $2n$ secteurs égaux. On colorie n secteurs en bleu et n en rouge dans un ordre quelconque. Dans les secteurs rouges on inscrit, en commençant par un certain secteur, les nombres de 1 à n dans le sens des aiguilles d'une montre. Dans les secteurs bleus on inscrit également, en commençant par un certain secteur, les nombres de 1 à n, mais dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Prouver qu'il existe un demi disque dans lequel sont inscrits tous les nombres de 1 a n.

Exercice 5 [2 + 5 points]
Pour un entier naturel i on définit le nombre $M(i)$ par la règle suivante : écrivons i en base 2 ; si le nombre des 1 dans cette écriture est pair, alors $M(i) = 0$; s'il est impair, alors $M(i) = 1$. (Les premiers termes $M(i)$ sont 0,1,1,0,1,0,0,1...)
(a) Considérons la suite finie $M(0), M(1), \ldots, M(1000)$. Montrer que le nombre de termes $M(i)$ de cette suite tels que $M(i) = M(i+1)$ est au moins 320.
(b) Considérons la suite finie $M(0), M(1), \ldots, M(1000000)$. Montrer que le nombre de termes $M(i)$ de cette suite tels que $M(i) = M(i+7)$ est au moins 450000.