



## 20<sup>ème</sup> TOURNOI DES VILLES

Automne 1998 ~ Quatrième Troisième Seconde  
Épreuve normale

### Exercice 1 [ 3 points ]

Un cube  $20 \times 20 \times 20$  est divisé en 8000 cubes unitaires. On écrit un nombre dans chaque cube unitaire. Dans chaque ligne et dans chaque colonne de 20 petits cubes, parallèle à une des arêtes du cube, la somme des nombres fait 1. Dans un des petits cubes, le nombre écrit est 10. Par ce petit cube passent trois couches  $1 \times 20 \times 20$  parallèles aux faces du cube. Trouver la somme de tous les nombres en dehors de ces trois couches.

### Exercice 2 [ 3 points ]

Le carré d'un nombre entier est de la forme  $\dots 09$  (se termine par les chiffres 0 et 9). Montrer que le troisième chiffre en partant de la droite est pair.

### Exercice 3 [ 4 points ]

Dans un triangle ABC, les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  se trouvent sur les côtés BC, CA et AB respectivement. On sait que  $\widehat{AC'B'} = \widehat{B'AC}$ ,  $\widehat{CBA'} = \widehat{AC'B}$  et  $\widehat{BAC'} = \widehat{C'BA}$ . Prouver que les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont les milieux des côtés correspondants.

### Exercice 4 [ 4 points ]

12 candidats au poste de maire participent à une discussion télévisée. Au bout d'un certain temps l'un d'eux a dit : « Jusqu'à là on a menti une seule fois. » Un deuxième a dit : « Maintenant, cela fait deux fois. ». « Trois fois maintenant », a dit le troisième, et ils ont continué comme cela jusqu'au douzième, qui a affirmé qu'avant lui on avait menti 12 fois. Le présentateur a alors arrêté la discussion. Sachant qu'au moins un des candidats a correctement annoncé combien de fois on avait menti avant lui, trouver combien de fois les candidats ont menti au total.

### Exercice 5 [ 5 points ]

Un  $(m,n)$ -crocodile est une pièce d'échecs qui, en un coup, peut avancer de  $m$  cases dans une direction (verticale ou horizontale), puis de  $n$  cases dans la direction perpendiculaire. (Un  $(2,1)$ -crocodile est un cavalier ordinaire.) Montrer que pour n'importe quels entiers  $m$  et  $n$  on peut colorier les cases d'un échiquier infini en noir et blanc de sorte que deux cases reliées par un coup de crocodile soient toujours de deux couleurs différentes.