20ème TOURNOI DES VILLES

Automne 1998 ~ Quatrième Troisième Seconde
Épreuve difficile

Exercice 1 [3 points]
Prouver que si, pour deux entier naturels non nuls a et b,
PPCM (a,a+5) = PPCM (b,b+5), alors a = b.

Exercice 2 [4 points]
Jean et Marie ont chacun un carré blanc 8 x 8 divisé en cases 1 x 1. Ils ont colorié en bleu un certain nombre de cases, le même nombre sur chaque carré. Démontrer qu'on peut découper le carré de Jean et celui de Marie en « dominos » 2 x 1 de sorte qu'on puisse composer un carré 8 x 8 à partir des dominos de Jean et un autre à partir de ceux de Marie tels que le dessin bleu sur ces deux carrés soit le même.

Exercice 3 [5 points]
Le segment AB coupe deux cercles de même rayon sur le plan et est parallèle à la droite qui relie leurs centres. Tous les points d'intersection de la droite AB avec les deux cercles se trouvent entre A et B. De A on mène les deux tangentes au cercle le plus proche de A ; de B, les deux tangentes au cercle le plus proche de B. Il se trouve que ces 4 tangentes forment un quadrilatère qui contient les deux cercles. Montrer que ce quadrilatère est circonscrit (qu'il existe un cercle tangent à ces 4 côtés).

Exercice 4 [6 points]
On trace toutes les diagonales d'un 25-gone régulier. Démontrer qu'il n'y a pas 9 diagonales qui passent par un même point intérieur du 25-gone.

Exercice 5 [7 points]
On a 20 billes de 10 couleurs, 2 billes de chaque couleur. Elles ont été mises dans 10 boîtes (d'une manière quelconque). On sait qu'il est possible de choisir une bille dans chaque boîte de sorte que toutes les couleurs soient représentées. Démontrer que le nombre de tels choix est une puissance non nulle de 2.

Exercice 6 [7 points]
Une bande de brigands a volé un sac de pièces. Chaque pièce vaut un nombre entier de francs. Il se trouve que si on met une des pièces de côté, le reste peut toujours être partagé parmi les brigands de sorte que chacun reçoive la même somme d'argent. Montrer que si on met une pièce de côté, le nombre de pièces qui restent est divisible par le nombre de brigands.