



## 20<sup>ème</sup> TOURNOI DES VILLES

Automne 1998 ~ Première Terminale  
Épreuve difficile

### Exercice 1 [ 2 + 3 points ]

- (a) Prouver que si, pour deux entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$ ,  $\text{PPCM}(a, a+5) = \text{PPCM}(b, b+5)$ , alors  $a = b$ .
- (b) Est-ce que, pour des entiers naturels non nuls  $a$ ,  $b$  et  $c$ , il est possible d'avoir l'égalité  $\text{PPCM}(a, b) = \text{PPCM}(a+c, b+c)$  ?

### Exercice 2 [ 4 points ]

Le segment  $AB$  coupe deux cercles de même rayon sur le plan et est parallèle à la droite qui relie leurs centres. Tous les points d'intersection de la droite  $AB$  avec les deux cercles se trouvent entre  $A$  et  $B$ . De  $A$  on mène les deux tangentes au cercle le plus proche de  $A$  ; de  $B$ , les deux tangentes au cercle le plus proche de  $B$ . Il se trouve que ces 4 tangentes forment un quadrilatère qui contient les deux cercles. Montrer que ce quadrilatère est circonscrit (qu'il existe un cercle tangent à ces 4 côtés).

### Exercice 3 [ 5 points ]

Neuf nombres sont écrits dans un tableau  $3 \times 3$  :

$a_1$	$a_2$	$a_3$
$b_1$	$b_2$	$b_3$
$c_1$	$c_2$	$c_3$

On appelle « somme d'une ligne (colonne) » ou « produit d'une ligne (colonne) » la somme ou le produit des nombres de cette ligne (colonne). On sait que les sommes de toutes les lignes et de toutes les colonnes sont égaux :

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3.$$

Montrer que la somme des produits des colonnes est égale à la somme des produits des lignes :  $a_1 \times b_1 \times c_1 + a_2 \times b_2 \times c_2 + a_3 \times b_3 \times c_3 = a_1 \times a_2 \times a_3 + b_1 \times b_2 \times b_3 + c_1 \times c_2 \times c_3$ .

### Exercice 4 [ 6 points ]

À une table ronde, 12 places ont été préparées pour les 12 membres du jury du Tournoi des Villes, avec le nom de chaque membre du jury marqué devant sa place. Le président du jury, arrivé le premier, au lieu de prendre sa place s'est assis par erreur sur la place suivante dans le sens des aiguilles d'une montre. Ensuite chaque membre du jury prenait sa propre place, ou bien, si elle était déjà occupée, il contournait la table dans le sens des aiguilles d'une montre et prenait la première place libre. La disposition finale des membres du jury dépend de l'ordre dans lequel ils entraient dans la salle. Combien de dispositions différentes peut-il y avoir ?

### Exercice 5 [ 7 points ]

La « taille » d'un parallélépipède rectangulaire est la somme de ses trois dimensions : la longueur, la largeur et l'hauteur. Est-il possible qu'un parallélépipède de taille plus grande rentre à l'intérieur d'un parallélépipède de taille plus petite ?

### Exercice 6 [ 8 points ]

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d},$$

où les polynômes quadratiques  $x^2 + ax + b$  et  $x^2 + cx + d$  n'ont pas de racines communes.

Prouver que les affirmations suivantes sont équivalentes :

- Il existe un intervalle de nombres réels tel que les valeurs prises par  $f$  ne se trouvent jamais dans cet intervalle ;
- $f(x)$  peut être mise sous la forme  $f(x) = f_1(f_2(\dots f_{n-1}(f_n(x)) \dots))$ , où chaque fonction  $f_i$  est de la forme  $k_i x + b_i$ ,  $1/x$  ou bien  $x^2$ .